**Tema 1.1.2. Combinaciones**

**Motivación 1.**  Un volumen contiene bacterias y , se toma una gota de volumen . ¿De cuántas formas pueden estar 3 bacterias en la gota?

**Solución.** Suponiendo que las bacterias no tienen instinto social entonces el número de formas en que 3 bacterias pueden estar en la gota son:



En este caso la terna significa que las bacteria y están fuera de la gota. Como se observa las ternas difieren en por lo menos una bacteria y no importa el orden en que están colocadas. A este tipo de arreglos se les llama las combinaciones de 5 bacterias tomadas de 3 en 3 y el número de combinaciones se representa y calcula como:

Ahora bien, la probabilidad de que una bacteria esté en la gota es , si la gota es muy pequeña la probabilidad es pequeña y si la gota es grande la probabilidad es grande. La probabilidad de que la gota no contenga una bacteria es . Por lo tanto, la probabilidad de que la gota contenga 3 bacterias es la suma de las probabilidades de las 10 combinaciones. Solo necesitamos calcular la probabilidad de que 3 estén y 2 no estén en la gota como:

Por lo tanto, la probabilidad de que 3 bacterias estén en la gota es:

**Motivación 2. La estadística de Fermi-Dirac**. Consideremos un sistema mecánico de part+iculas indistinguibles. En la mecánica estadística se suele subdividir el espacio de fase en un número grande de celdas de manera que cada partícula esté asignada a una celda. En esta forma el estado del sistema entero se describe en términos de una distribución aleatoria de partículas en celdas. La estadística de Fermi-Dirac se basa en las hipótesis:

* Es imposible que dos o más partículas estén en la misma celda.
* Todos los arreglos distinguibles que satisfacen la primera condición, tienen probabilidades iguales.

Este modelo se aplica a electrones, neutrones y protones. Por ejemplo, si tenemos 3 neutrones y 5 celdas, según la estadística de Fermi-Dirac los siguientes arreglos tienen la misma probabilidad

El número de formas en que podemos distribuir los 3 neutrones en las 5 celdas no es otra cosa que el número de combinaciones que se pueden hacer con 5 celdas tomadas de 3 en 3. Este número se obtiene como

Como cada una de las 10 formas de colocar los neutrones en las celdas tienen la misma probabilidad entonces esta vale .

**Definición 1.** Supongamos que tenemos objetos. Una combinación de estos objetos tomando a la vez es cualquier selección de objetos donde el orden no cuenta. Al número de combinaciones de objetos tomando a la vez se representa por .

**Observación.** Las combinaciones se obtienen con la calculadora CASIO fx-991ES tecleando

**Ejercicios.**

1. Con la calculadora obtenga el valor de las siguientes expresiones:

.

**Ejemplo 2.** Encuentre el número de combinaciones de cuatro objetos tomados tres a la vez.

**Solución.** Cada combinación que contenga tres objetos, produce permutaciones de los objetos en la combinación.

|  |  |
| --- | --- |
| **Combinaciones** | **Permutaciones** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

El número de combinaciones multiplicado por es igual al número de permutaciones. Es decir:

**Teorema 1.**

**Demostración.** Cualquier combinación de objetos, tomado a la vez, determina permutaciones de los objetos en la combinación, se puede concluir que:

(2)

Despejando se obtiene

(3)

**Ejemplo 3.** De una urna que contiene 6 canicas rojas y 8 azules se retiran al azar 5 canicas sin remplazo. Encuentre la probabilidad de que 3 sean rojas y 2 azules.

**Solución.** Podemos seleccionar 3 canicas rojas de 6 canicas rojas de formas. Después podemos seleccionar 2 canicas azules de formas. Por lo tanto el número de formas en que podemos seleccionar 3 canicas rojas y 2 azules por el principio fundamental del conteo es:

Por otro lado el número de formas de seleccionar 5 canicas de un total de 14 canicas es

Así la probabilidad buscada es30

**Ejemplo 4.** En un juego de póker se sacan 5 cartas de un naipe de 52 cartas bien barajadas. Encuentre la probabilidad de (a) 4 ases, (b) 4 ases y un rey, (c) 3 diez y 2 jotas.

**Solución.** (a) 48/C(52,5), (b) 4/C(52,5), (c) C(4,3)C(4,2)/C(52,5). Explique por qué.

**Ejercicios.**

1. En un juego de póker se sacan 5 cartas de un naipe de 52 cartas bien barajadas. Encuentre la probabilidad de (a) nueve, diez, jota, reina, rey en cualquier orden (b) 3 cartas son de un palo y 2 de otro, (c) se saca al menos un as.

Respuesta: (a) 64/162435, (b) 429/4165, (c) 18472/54145

1. Una máquina produce un total de 12000 tornillos cada día, de los cuales el 3% en promedio es defectuoso. Encuentre la probabilidad de que de 600 tornillos tomados al azar, haya 12 defectuosos.

Respuesta: 0.034

1. En un juego de Bridge, cada uno de los 4 jugadores recibe 13 cartas de un naipe bien barajado de 52 cartas. Encuentre la probabilidad de que un jugador (digamos, el mayor) reciba (a) 7 diamantes, 2 tréboles, 3 de corazones y 1 de picas; (b) un palo completo.

Respuesta: (a) 0.00078, (b) 6.29

**Teorema 2.** El número de formas en las que se pueden asignar objetos en grupos diferentes que contienen objetos respectivamente es

, en donde

**Ejemplo 5.** Se tienen 4 personas y , queremos formar dos equipos con dos personas cada uno, ¿cuántos parejas de equipos diferentes se pueden hacer?

**Solución.** Nos vemos tentados a aplicar la fórmula del teorema 2, pues queremos asignar 4 personas en 2 equipos que contienen 2 personas respectivamente y según la fórmula el número de equipos sería

Pero al sacar las parejas de equipos, estas son:

¿Qué es lo que está pasando? Pues sucede que la fórmula nos da las parejas en la que el orden importa, así la fórmula no distingue entre

y

**Ejemplo 5.** Encuentre el número *m* de formas en que 9 juguetes pueden dividirse entre 4 niños si el más joven debe recibir 3 juguetes y cada uno de los demás, 2 juguetes.

**Solución.** Por el teorema 2

**Ejemplo 6.** Encuentre el número m de formas en que 12 estudiantes puedan ser repartidos en 3 equipos , de manera que cada equipo contenga 4 estudiantes.

**Solución.** Por el teorema 2 la respuesta es

Este resultado incluye el caso en que los equipos están formados por las mismas personas y los equipos ordenados de manera diferente, estos casos no nos interesa contarlos. Tomando en cuenta que 3 equipos se pueden ordenar de 3! Formas entonces

**Ejercicios.**

1. Nueve personas salen de viaje para esquiar en vehículos cuyas capacidades son de 2, 4 y 5 pasajeros, respectivamente. ¿En cuántas formas es posible transportar a las 9 personas hasta el albergue con todos los vehículos?

Respuesta: 4410.

1. ¿En cuántas formas pueden plantarse, a lo largo de la línea divisoria de una propiedad, 3 robles, 4 pinos y 2 arces, si no se distingue entre los árboles de la misma clase?

Respuesta: 1260

1. Un colegio participa en 12 partidos de futbol en una temporada. ¿De cuántas maneras puede el equipo terminar la temporada con 7 victorias, 3 derrotas y 2 empates.

Respuesta: 7920

**Definición 2. Coeficientes Binomiales.** El símbolo , donde y son enteros positivos con , se llama coeficiente binomial y se define como:

**Teorema 3.**  o en forma equivalente donde .

**Demostración.** .

**Ejemplo 5.** Calcular los coeficientes binomiales

* ;

**Ejemplo.** Se tienen 5 bacterias, ¿cuál es la probabilidad de que una gota contenga 0,1,2,3,4 o 5 bacterias? Si la probabilidad de que una bacteria esté en la gota es y de que la gota no contenga una bacteria es .

**Solución.** Las probabilidades vienen dadas por

, , , , y

Estos términos corresponder al desarrollo del binomio

**Definición 3. Coeficientes binomiales y el triángulo de Pascal.** Los números se denominan *coeficientes binomiales* puesto que estos aparecen como los coeficientes en la expansión de .

**Teorema 4**.**Teorema del Binomio de Newton.**

**Ejemplo 6.** Utilizando el teorema 4 calcule .

**Solución.** Tomando y obtenemos

Calculando los coeficientes binomiales con la definición 2 se obtiene

**Ejemplo 7.** Demostrar que

**Solución.** En el desarrollo del binomio de Newton tomamos .

**Teorema 5.** Los coeficientes binomiales satisfacen la identidad

**Demostración.** Vamos a desarrollar el segundo miembro para obtener el primero

ema 2.3: inomioema del binomio da la expresien la expansi

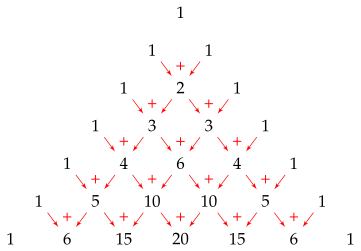
Hacemos la suma observando que el común denominador es Porque

y

Entonces sumando obtenemos

**Ejemplo 8. El Triángulo de Pascal.** Utilizando el teorema 4 escribimos los binomios de Newton para y 6

Ahora escribimos solamente los coeficientes de cada binomio

****

Podemos dar una interpretación de la fórmula del teorema 5. En el triángulo se ve que, por ejemplo, 6+4=10 o escritos estos números como coeficientes binomiales que

o

Siguiendo dos flechas lo mismo se puede decir para otra terna de números.

**Ejercicios.**

1. Expanda (a) , (b)

Solución: (a) , (b)

1. ¿Para qué valor de es ?

Respuesta: 6

1. Aplique el desarrollo binomial a cada factor en la ecuación

Compare los coeficientes de en los 2 lados de la igualdad para demostrar que

**Ejemplo 9. (Mendenhall):** Un conflicto laboral ha surgido con respecto a una supuesta distribución desigual de 20 trabajadores en cuatro diferentes trabajos de construcción. El primer trabajo (considerado como una ocupación detestable) requería de seis trabajadores, el segundo, el tercero y el cuarto, utilizaban respectivamente 4, 5 y 5. La controversia surgió con respecto a una supuesta distribución aleatoria de los trabajadores en los trabajos que asignó a los 4 miembros de un grupo étnico en particular al grupo 1. Un comité conciliatorio pidió conocer la probabilidad del evento observado, para establecer si la asignación se hizo o no de manera injusta. Determine el número de puntos muéstrales en el espacio muestra S para este experimento. Es decir, determine el número de formas en las que se pueden separar los 20 trabajadores en grupos de tamaño apropiado para realizar los trabajos. Encuentre la probabilidad del evento observado suponiendo que se asignaron los trabajadores aleatoriamente.

**Solución.** Sea el evento cuando los cuatro trabajadores de un grupo étnico realizan el trabajo 1 entonces la probabilidad buscada es

donde es el número de formas de separar los 20 trabajadores en cuatro grupos de entonces

Además es el número de formas de asignar los trabajadores a los cuatro trabajos, si se sabe que los cuatro del grupo étnico realizan el trabajo 1. Entonces nos quedan 16 trabajadores que deben distribuirse aleatoriamente y

(Quedan dos lugares para el trabajo 1). De aquí que

Entonces, si los trabajadores fueron asignados aleatoriamente a los trabajos, la probabilidad de que los 4 miembros de un grupo étnico estén en el trabajo indeseable es muy pequeña. **Es razonable dudar de que la asignación de los trabajos fue hecha al azar.**

**Ejercicios.**

1. **Mendenhall.** Una compañía compra refacciones a *M* distribuidores y desea ordenar *n* pedidos . Suponiendo que la compañía hace los pedidos de tal manera que cada distribuidor tiene las mismas posibilidades de surtir cualquiera de los pedidos y que no existe ninguna restricción con respecto al número de pedidos que se pueden ordenar con cualquier vendedor. Encontrar la probabilidad de que un distribuidor en particular tenga exactamente *k* pedidos .

Solución..